第27卷 第4期
2010年08月

工 程 数 学 学 报
CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol. 27 No. 4
Aug. 2010

文章编号:1005-3085(2010)04-0605-07

α 混合序列下的核密度估计量的渐近正态性*

赵 翌[1]， 杨善朝[2]

(1- 桂林师范高等专科学校数学与计算机科学系，桂林 541001;
2- 广西师范大学数学科学学院，桂林 541004)

摘 要: 核密度估计是一类重要的非参数分布密度估计，而且 α 混合相依结构在金融时间序列中广泛存在。本文在 α 混合序列情形下，利用大小分块方法和矩不等式证明了核密度估计量的渐近正态性及其收敛速度，这个结果可以用于构造 α 混合序列未知的密度函数的置信区间，并且在适当窗宽条件下获得了较好的收敛速度。

关键词: α 混合；核密度估计；渐近正态性；收敛速度；置信区间

分类号: **AMS**(2000) 62G07; 62G30　　**中图分类号**: O211.4; O212.7　　**文献标识码**: A

1 引言

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 X 的样本，X 具有未知的密度函数 $f(x)$，其核密度估计量为

$$\widehat{f}_{n,h}(x) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K\Big(\frac{x - X_i}{h}\Big),$$

这里 $K(\cdot)$ 表示核函数，h 为窗宽。

令 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上实值随机变量序列，$\mathcal{F}_n^m = \sigma(X_i, n \leq i \leq m)$ 是由随机变量序列 $\{X_i, n \leq i \leq m\}$ 产生的 σ 代数，定义

$$\alpha(n) = \sup_{k\geq 1} \sup_{A\in\mathcal{F}_1^k, B\in\mathcal{F}_{k+n}^\infty} \big|P(AB) - P(A)P(B)\big|,$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha(n) = 0$，则称随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为 α 混合。

在独立样本下，关于 $\widehat{f}_{n,h}(x)$ 的极限性质已研究得较深入，见文献 [1] 所述。目前，基于混合相依结构的时间序列模型引起很多统计、金融、经济等方面学者的关注。在相依样本下，有不少学者讨论了 $\widehat{f}_{n,h}(x)$ 的渐近正态性以及其它极限性质。如文献 [2] 对 φ-混合序列讨论 $\widehat{f}_{n,h}(x)$ 的均方相合性和渐近正态性，文献 [3] 进一步弱化了文献 [2] 中所给的条件，对 $\widehat{f}_{n,h}(x)$ 的渐近正态性进行讨论。文献 [4] 在 PA 或 NA 的情形下，给出了 $\widehat{f}_{n,h}(x)$ 的渐近正态性。Bosq[5] 在 $h = Cn^{-1/(d+4)}/\log\log n\,(c > 0)$ 条件下讨论了 α-混合的 d 维核密度估计量渐近正态性。但均未给出其渐近正态性的收敛速度。本文将在 α-混合序列情形下讨论 $\widehat{f}_{n,h}(x)$ 的渐近正态性，并给出其收敛速度，最后，给出密度函数的置信区间。

收稿日期: 2009-02-24. **作者简介**: 赵翌 (1974年4月生)，女，讲师. 研究方向：概率与数理统计.

***基金项目**: 国家自然科学基金 (10661003)；广西自然科学基金 (0728091).

2 主要结论

全文将使用如下基本条件:

条件1 1) 设$\{X_n, n \geq 1\}$是一个平稳α混合随机变量序列，具有共同概率密度函数$f(x)$，且存在$0 < \delta < 1$使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{\delta/(2+\delta)}(n) < \infty;$$

2) 设(X_1, X_{j+1})的联合密度函数为$f_{1,j+1}$，对任意的$u, v \in R$和$j \geq 1$，有$|f_{1,j+1}(u,v) - f(u)f(v)| \leq c$。

条件2 核函数$K(u)$是一个概率密度函数，在R^1上有界，且满足条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} uK(u)\mathrm{d}u = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} u^2K(u)\mathrm{d}u = \sigma_K^2 < \infty.$$

条件3 设$p = p(n)$, $q = q(n)$为与n有关的正整数，满足$p + q \leq n$, $qp^{-1} \to 0$。记$k = [n/(p+q)]$，这里$[x]$表示不超过x的最大整数。

条件4 当$n \to \infty$时，窗宽h满足$h \to 0$, $nh \to \infty$, $ph \to 0$。

条件5 当$n \to \infty$时，$\delta \in (0,1)$满足$pq^{-2/\delta}h^{-1} \to 0$, $np^{-1}q^{-(2+\delta)/\delta} \to 0$。设

$$\sigma_n^2 = \mathrm{Var}\big(\widehat{f}_{n,h}(x)\big), \quad S_n(x) = \frac{\widehat{f}_{n,h}(x) - E\widehat{f}_{n,h}(x)}{\sigma_n}, \quad F_{S_n}(x) = P\{S_n(x) < x\},$$

$\Phi(x)$为标准正态分布函数。本文将证明如下主要结论:

定理1 设基本条件1至条件5成立，则

$$\sup_x |F_{S_n}(x) - \Phi(x)| = C\big\{(nh)^{-1/2} + (qp^{-1})^{1/3} + pq^{-2/\delta}h^{-1} + (np^{-1}q^{-(2+\delta)/\delta})^{1/4}\big\}.$$

推论1 设基本条件1和条件2成立，$\delta \leq 2/3$且$h = Cn^{-1/5}/\log\log n$，则有$\sup\limits_x |F_{S_n}(x) - \Phi(x)| \to 0$。

取$q \sim n^{1/5}$, $p \sim n^{1/5}(\log\log n)^{1/2}$，条件3，条件4和条件5显然成立。于是由定理1得推论1的结论。这个结论与Bosq[5]的结论相比，条件$\delta \leq 2/3$稍强一些，但对联合密度函数$f_{1,j+1}$的要求较弱。

推论2 设基本条件1至条件4成立，且$\alpha(n)$为几何衰减，即存在$0 < \rho < 1$使得$\alpha(n) = O(\rho^n)$。如果$q \sim n^\tau$，其中$0 < \tau < 1$，则

$$\sup_x |F_{S_n}(x) - \Phi(x)| = C\big\{(nh)^{-1/2} + (qp^{-1})^{1/3}\big\}.$$

由于$\alpha(n)$为几何衰减，定理1中δ可以充分小，则条件5在$q \sim n^\tau$下成立，因此得到推论2。注意到$h = Cn^{-1/5}$是密度估计在均方误差意义下的最优窗宽，此时在推论2中令$q \sim n^{\varepsilon/10}$, $p \sim n^{1/5-\varepsilon/10}$，其中$0 < \varepsilon < 1$，则条件3和条件4满足，从而有如下结论。

推论3 设基本条件1和条件2成立，且$\alpha(n)$为几何衰减。如果$h = Cn^{-1/5}$，则对任意的$0 < \varepsilon < 1$，有$\sup\limits_x |F_{S_n}(x) - \Phi(x)| = Cn^{-(1-\varepsilon)/15}$。

由于ε可以充分小，所以这个收敛速度几乎为$n^{-1/15}$。

另外，注意到$E\widehat{f}_{n,h}(x) \to f(x)$以及$nh\sigma_n^2 \to \sigma^2$ (见后面引理7)，其中

$$\sigma^2 = f(x)\int_R K^2(u)\mathrm{d}u,$$

则由定理1，可得 $f(x)$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\frac{nh\widehat{f}_{n,h}(x)}{\left(\frac{nh}{\int_R K^2(u)\mathrm{d}u}+u_{1-\alpha/2}\right)\int_R K^2(u)\mathrm{d}u}, \frac{nh\widehat{f}_{n,h}(x)}{\left(\frac{nh}{\int_R K^2(u)\mathrm{d}u}-u_{1-\alpha/2}\right)\int_R K^2(u)\mathrm{d}u}\right].$$

3 几个引理

记 $\|X\|_r := (E|X|^r)^{1/r}$。为了证明本文的主要结论，我们首先给出一些引理。

引理1[6] 设 $\xi\in\mathcal{F}_{-\infty}^{m}$，$\eta\in\mathcal{F}_{m+n}^{\infty}$。如果 $|\xi|\le C_1$，$|\eta|\le C_2$，则 $|E(\xi\eta)-E\xi E\eta|\le 4C_1C_2\alpha(n)$。

引理2[7] 令 $\{X_i: i\ge 1\}$ 为零均值的 α 混合随机变量序列。若对某 $\delta>0$ 有

$$E|X_i|^{2+\delta}<\infty,\quad \sum_{j=1}^{\infty}\alpha^{\delta/2+\delta}(j)\le\infty$$

成立，则存在不依赖于 n 的某正常数 C，使得

$$E\Big(\sum_{i=1}^{n}X_i\Big)^2\le C\sum_{i=1}^{n}\|X_i\|_{2+\delta}^2.$$

引理3 [8] 令 $\{X_i: i\ge 1\}$ 为 α 混合随机变量序列。p, q 为正整数。当 $1\le l\le k$ 时，定义

$$\eta_l := \sum_{j=(l-1)(p+q)+1}^{(l-1)(p+q)+p} X_j.$$

如果 $r>0$, $s>0$ 且 $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$，那么

$$\left|E\exp\left(\mathrm{i}t\sum_{l=1}^{k}\eta_l\right)-\prod_{l=1}^{k}E\exp(\mathrm{i}t\,\eta_l)\right|\le C|t|\alpha^{1/s}(q)\sum_{l=1}^{k}\|\eta_l\|_r.$$

引理4[9] 设 $\{\zeta_n: n\ge 1\}$ 和 $\{\eta_n: n\ge 1\}$ 是两个随机变量序列，$\{\gamma_n: n\ge 1\}$ 是一个正常数序列，且 $\gamma_n\to 0$。如果 $\sup_u\left|F_{\zeta_n}(u)-\Phi(u)\right|\le C\gamma_n$，则

$$\sup_u\left|F_{\zeta_n+\eta_n}(u)-\Phi(u)\right|\le C\big\{\gamma_n+\varepsilon+P(|\eta_n|\ge\varepsilon)\big\},\quad \forall\,\varepsilon>0.$$

4 定理的证明

记

$$K_{ni}=K\Big(\frac{x-X_i}{h}\Big),\quad Y_{ni}=\frac{1}{nh\sigma_n}[K_{ni}-EK_{ni}],$$

定义大块和小块为

$$\xi_{i,1}=\sum_{j=(i-1)(p+q)+1}^{(i-1)(p+q)+p}Y_{nj},\quad \xi_{i,2}=\sum_{j=(i-1)(p+q)+p+1}^{i(p+q)}Y_{nj},$$

$$\xi_{i,3}=\sum_{j=k(p+q)+1}^{n}Y_{nj},\quad i=1,2,\cdots,k.$$

对给定的n，当$i > n$时我们不妨假设$K_{ni} = 0$，并记

$$S_{n,1} = \sum_{i=1}^{k+1} \xi_{i,1}, \quad S_{n,2} = \sum_{i=1}^{k+1} \xi_{i,2}.$$

于是，有$S_n = S_{n,1} + S_{n,2}$。为了证明定理1，我们先证明几个引理。

引理5 在条件1和条件2下，如果$h \to 0$，则有

$$\text{(i)} \quad \left|\mathrm{Cov}(K_{n,i}, K_{n,j})\right| \le Ch^2, \quad \forall\, i \neq j, \qquad \text{(ii)} \quad E(K_{n1}^d) \le Ch, \quad \forall\, d \ge 1,$$

$$\text{(iii)} \quad h^{-1}\mathrm{Var}(K_{n1}) \to f(x) \int_R K^2(u)\mathrm{d}u =: \sigma^2.$$

证明 利用条件2，引理5显然成立。

引理6 在条件1至条件5下，有

$$\text{(i)} \quad \sum_{i=1}^{k+1} E(\xi_{i,1}^2) = (nh\sigma_n^2)^{-1}\big\{\sigma^2 + O(ph)\big\}, \quad \sum_{i=1}^{k+1} E(\xi_{i,2}^2) \le C(nh\sigma_n^2)^{-1} qp^{-1},$$

$$\text{(ii)} \quad \sum_{1\le i<j\le k+1} \left|E(\xi_{i,1}\xi_{j,1})\right| \le C(nh\sigma_n^2)^{-1} pq^{-2/\delta} h^{-1},$$

$$\sum_{1\le i<j\le k+1} \left|E(\xi_{i,2}\xi_{j,2})\right| \le C(nh\sigma_n^2)^{-1} q^2 p^{-(2+\delta)/\delta} h^{-1}.$$

证明 利用引理5，对$t \neq s$，有

$$\left|E(Y_{nt}Y_{ns})\right| = (nh\sigma_n)^{-2} \left|\mathrm{Cov}(K_{nt}, K_{ns})\right| \le C(nh\sigma_n)^{-2} h^2,$$

且注意到$E(Y_{nj}^2) = (nh\sigma_n)^{-2}\mathrm{Var}(K_{n1})$，有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} E(\xi_{i,1}^2) &= \sum_{i=1}^{k+1}\Big\{ \sum_{j=(i-1)(p+q)+1}^{(i-1)(p+q)+p} E(Y_{nj}^2) + 2 \sum_{t=(i-1)(p+q)+1}^{(i-1)(p+q)+p} \sum_{s=t+1}^{(i-1)(p+q)+p} E(Y_{nt}Y_{ns})\Big\} \\ &= (nh\sigma_n^2)^{-1} \big\{\big((k+1)p/n\big)h^{-1}\mathrm{Var}(K_{n1}) + O\big(kp^2h/n\big)\big\}. \end{aligned} \tag{1}$$

同理，有

$$\sum_{i=1}^{k+1} E(\xi_{i,2}^2) = (nh\sigma_n^2)^{-1} \big\{\big((k+1)q/n\big)h^{-1}\mathrm{Var}(K_{n1}) + O(kq^2h/n)\big\}.$$

由引理5中(iii)，$kp/n = 1 + O(1/n)$, $(k+1)p/n = 1 + O(1/n)$, $q \le p$，且$ph \to 0$，可知结论(i)成立。根据引理1，有

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i<j\le k+1} \left|E(\xi_{i,1}\xi_{j,1})\right| &\le \frac{C}{(nh\sigma_n)^2} \sum_{1\le i<j\le k+1} \sum_{t=(i-1)(p+q)+1}^{(i-1)(p+q)+p} \sum_{s=(j-1)(p+q)+1}^{(j-1)(p+q)+p} \left|\mathrm{Cov}(K_{nt}, K_{ns})\right| \\ &\le \frac{Ckp^2}{(nh\sigma_n)^2} \sum_{n=q}^{\infty} \alpha(n) \le C(nh\sigma_n^2)^{-1} pq^{-2/\delta} h^{-1}. \end{aligned}$$

同理

$$\sum_{1\le i<j\le k+1}\left|E(\xi_{i,2}\xi_{j,2})\right|\le C(nh\sigma_n^2)^{-1}q^2p^{-(2+\delta)/\delta}h^{-1}.$$

结论 (ii) 成立。

引理7　设基本条件1至条件5成立，则当$n\to\infty$时，有$nh\sigma_n^2\to\sigma^2$。

证明　由引理6，有

$$\mathrm{Var}(S_{n,1})=(nh\sigma_n^2)^{-1}\big\{\sigma^2+O(ph)+o(pq^{-2/\delta}h^{-1})\big\}.$$

同理

$$\mathrm{Var}(S_{n,2})\le C(nh\sigma_n^2)^{-1}\big\{qp^{-1}+q^2p^{-(2+\delta)/\delta}h^{-1}\big\}. \tag{2}$$

由条件3至条件5及$nh\sigma_n^2|\mathrm{Cov}(S_{n,1},S_{n,2})|\to 0$。从而有$nh\sigma_n^2=nh\sigma_n^2\mathrm{Var}(S_n)\to\sigma^2$。

引理8　假设条件1至条件5成立，则

$$\text{(i)}\quad E(S_{n,2})^2\le C\big\{qp^{-1}+q^2p^{-(2+\delta)/\delta}h^{-1}\big\},$$

$$\text{(ii)}\quad P\big(|S_{n,2}|\ge(qp^{-1}+q^2p^{-(2+\delta)/\delta}h^{-1})^{1/3}\big)\le C\big(qp^{-1}+q^2p^{-(2+\delta)/\delta}h^{-1}\big)^{1/3}.$$

证明　由 (2) 式和引理7，得第一个结论。然后利用Markov不等式得 (ii) 式。

令

$$s_n^2=\sum_{i=1}^{k}\mathrm{Var}(\xi_{i,1}).$$

引理9　假设条件1至条件5成立，则

$$|s_n^2-1|\le C\big\{\sqrt{qp^{-1}+q^2p^{-(2+\delta)/\delta}h^{-1}}+pq^{-2/\delta}h^{-1}\big\}.$$

证明　记

$$\Gamma_n=\sum_{1\le i<j\le k+1}\mathrm{Cov}(\xi_{i,1},\xi_{j,1}).$$

显然$s_n^2=E(S_{n,1}^2)-2\Gamma_n$，且$E(S_{n,1}^2)=1+E(S_{n,2}^2)-2E(S_nS_{n,2})$。由Hölder不等式，并根据引理6至引理8，可知引理9成立。

设$\{\zeta_i:i=1,2,\cdots,k+1\}$是独立随机变量序列，且$\xi_{i,1}$与$\zeta_i\,(i=1,2,\cdots,k+1)$有相同的分布。令$T_n=\Sigma_{i=1}^{k+1}\zeta_i$，$B_n^2=\Sigma_{i=1}^{k+1}\mathrm{Var}(\zeta_i)$，$F_Z(\cdot)$表示随机变量$Z$的分布函数，则$B_n=s_n$，$F_{T_n/B_n}(x)=F_{T_n}(x/s_n)$。

引理10　假设条件1至条件5成立，则

$$\text{(i)}\quad \sup_x\left|F_{T_n/B_n}(x)-\Phi(x)\right|\le C(nh)^{-1/2},$$

$$\text{(ii)}\quad \sup_x\left|F_{S_{n,1}}(x)-F_{T_n}(x)\right|\le C\Big\{\sqrt{q^{-(2+\delta)/(2\delta)}(np^{-1})^{1/2}}+(nh)^{-1/2}\Big\}.$$

证明　根据引理6和引理7，并由$B_n=s_n\to 1$和Berry-Esseen不等式，有

$$\begin{aligned}\sup_x\left|F_{T_n/B_n}(x)-\Phi(x)\right| &= \sup_x\left|P\Big(\frac{\Sigma_{i=1}^k\zeta_i}{B_n}<x\Big)-\Phi(x)\right|\\ &\le B_n^{-3}\sum_{i=1}^{k}E|\zeta_i|^3\le C(nh)^{-1/2}.\end{aligned}$$

设 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 分别为 $S_{n,1}$ 和 T_n 的特征函数。注意到

$$\psi(t)=E\big(\exp\{\mathrm{i}t\,T_n\}\big)=\prod_{m=1}^{k_n}E\exp\{\mathrm{i}t\,\zeta_i\}=\prod_{m=1}^{k_n}E\exp\{\mathrm{i}t\,\xi_{i,1}\}.$$

利用 (1) 式，有

$$\sum_{i=1}^{k+1}\sqrt{E(\xi_{i,1}^2)}\le C\sqrt{k^2p/n+k^2p^2h/n}\le Ck^{1/2}.$$

由引理3和引理2，有 $|\varphi(t)-\psi(t)|\le C|t|q^{-(2+\delta)/(2\delta)}(np^{-1})^{1/2}$。因此

$$I_1=:\int_{-T}^{T}\Big|\frac{\varphi(t)-\psi(t)}{t}\Big|\mathrm{d}t\le CTq^{-(2+\delta)/(2\delta)}(np^{-1})^{1/2}.$$

另一方面，由 $F_{T_n}(u)=F_{T_n/B_n}(u/s_n)$ 和引理10中 (i)，有

$$\begin{aligned}\sup_u\big|F_{T_n}(u+y)-F_{T_n}(u)\big| &\le 2\sup_u\big|F_{T_n/B_n}(u)-\Phi(u)\big|+\sup_u\big|\Phi((u+y)/s_n)-\Phi(u/s_n)\big|\\ &\le C\big((nh)^{-1/2}+|y|/s_n\big)\le C\big((nh)^{-1/2}+|y|\big).\end{aligned}$$

因此

$$I_2=:T\sup_u\int_{|y|\le c/T}\big|F_{T_n}(u+y)-F_{T_n}(u)\big|\mathrm{d}y\le C\big((nh)^{-1/2}+1/T\big).$$

由 Esseen 不等式，并取 $T=1/\sqrt{q^{-(2+\delta)/(2\delta)}(np^{-1})^{1/2}}$，得到结论 (ii)。

定理1的证明 由引理10和引理7，可得

$$\begin{aligned}&\sup_u\big|F_{S_{n,1}}(u)-\Phi(u)\big|\\ \le\ &\sup_u\big|F_{S_{n,1}}(u)-F_{T_n}(u)\big|+\sup_u\big|F_{T_n}(u)-\Phi(u/B_n)\big|+\sup_u\big|\Phi(u/B_n)-\Phi(u)\big|\\ \le\ &C\Big\{\sqrt{q^{-(2+\delta)/(2\delta)}(np^{-1})^{1/2}}+(nh)^{-1/2}+\sqrt{qp^{-1}+q^2p^{-(2+\delta)/\delta}h^{-1}}+pq^{-2/\delta}h^{-1}\Big\}.\end{aligned}$$

注意到 $S_n=S_{n,1}+S_{n,2}$ 及引理8中 (ii)，应用引理4及条件5有

$$\begin{aligned}\sup_x\big|F_{S_n}(x)-\Phi(x)\big| &= \sup_x\big|F_{S_{n,1}+S_{n,2}}(x)-\Phi(x)\big|\\ &\le C\Big\{\sqrt{q^{-(2+\delta)/(2\delta)}(np^{-1})^{1/2}}+(nh)^{-1/2}\\ &\quad+\sqrt{qp^{-1}+q^2p^{-(2+\delta)/\delta}h^{-1}}+pq^{-2/\delta}h^{-1}+\varepsilon+P\big(|S_{n,2}|\ge\varepsilon\big)\Big\}\\ &\le C\big\{q^{-(2+\delta)/(4\delta)}(np^{-1})^{1/4}+(nh)^{-1/2}+pq^{-2/\delta}h^{-1}+(qp^{-1})^{1/3}\big\}.\end{aligned}$$

即可证得定理1。

参考文献：

[1] 陈希孺，方兆本，李国英等. 非参数统计[M]. 上海：上海科学技术出版社，1989
Chen X R, Fang Z B, Li G Y, *et al.* Non-parametric Statistics[M]. Shanghai: Shanghai Scientific and Technical Publishers, 1989

[2] 林正炎. 相依样本情形时密度的核估计[J]. 科学通报，1983, 28(12): 709-713
Lin Z Y. The kernel estimate of a probability density function for dependence samples[J]. Chinese Science Bulletin, 1983, 28(12): 709-713

[3] 杨善朝. φ-混合样本密度估计的渐近正态性[J]. 广西师范大学学报(自然科学版)，1996, 14(1): 20-21
Yang S C. Asymptotic normality of the density estimator for φ-mixing samples[J]. Journal of Guangxi Normal University, 1996, 14(1): 20-21

[4] George G. Roussas, asymptotic normality of the kernel estimate of a probability density function under association[J]. Statistics and Prob Lett, 2000, 50: 1-12

[5] Bosq D. Nonparametric Statistics for Stochastic Processes[M]. Heidelberg: Spinger-Verlag, 1998

[6] Roussas G G, Ioannides D A. Moment inequalities for mixing sequences of random variables[J]. Stochastic Analysis and Applications, 1987, 5: 61-120

[7] Yang S C. Maximal moment inequality for partial sums of strong mixing sequences and application[J]. Acta Mathematica Sinica, English series, 2007, 23(6): 1013-1024

[8] 杨善朝，李永明. 强混合样本下回归加权估计的一致渐近正态性[J]. 数学学报，2006, 49(5): 1163-1170
Yang S C, Li Y M. Uniformly asymptotic normality of the regression weighted estimator for strong mixing samples[J]. Acta Mathematica Sinica, English series, 2006, 49(5): 1163-1170

[9] Yang S C. Uniformly asymptotic normality of the regression weighted estimator for negatively associated samples[J]. Statist and Probab Lett, 2003, 62: 101-110

Asymptotic Normality of the Kernel Density Estimator for α-mixing Random Variables

ZHAO Yi[1], YANG Shan-chao[2]

(1- Department of Mathematics and Computer Science, Guilin Normal College, Guilin 541001;
2- School of Mathematics Science, Guangxi Normal University, Guilin 541004)

Abstract: Kernel density estimators belong to an important class of estimators called non-parametric density estimators. The α-mixing dependence is a common assumption in the financial and economic time series. In this paper, under α-mixing random variable sequences, we prove that the asymptotic normality and establish the corresponding convergent rate of kernel density estimators by large and small blocks and the moment inequality. This result can be used to construct the confidence interval for an unknown density function of α-mixing random variable sequences and a better convergent rate is achieved under an appropriate bandwidth.

Keywords: α-mixing; kernel estimator; asymptotic normality; convergent rate; confidence interval

Received: 24 Feb 2009. **Accepted:** 24 Jan 2010.
Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (10161003); the Natural Science Foundation of Guangxi (0728091).